

FEBRUARY 28TH - MARCH 1ST, 2020  
CASTRO URDIALES (SPAIN)

## Symposium on Artificial Intelligence for Mathematics Education (AI4ME)

[ai4me.unican.es](http://ai4me.unican.es)



# Understanding and creating to better understand instrumental proof using QED-Tutrix

**Philippe R. Richard**

Laboratoire Turing

Université   
de Montréal

**UQÀM**

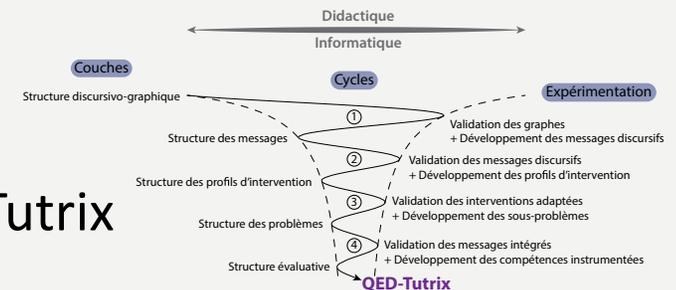
POLYTECHNIQUE  
MONTREAL

LE GÉNIE  
EN PREMIÈRE CLASSE



# The Turing Lab

- Multidisciplinary team: mathematics didactics and computer science (<http://turing.scedu.umontreal.ca>)
- Development of tutorial systems since 2009 and completion of the tutor software QED-Tutrix
- Our work is focused mainly on didactic and cognitive interactions:
  - From the idea of mathematical work in schools and the theory of mathematical working spaces (Kuzniak & Richard, 2014, and very more...)
  - And based on adaptive research approaches that encourage suitable mathematical working spaces (iterative and convergent processes)





# QED-Tutrix

- Software providing an interface to solve high school level geometry proof problems
- Handles the whole solving process (ex. exploration, reasoning, writing)
- Is able to provide customized help during the solving process, if necessary, related to the student's mathematical work
- The tutor must know *a priori* the various possible resolution paths to be able to anticipate the student's steps (inferential approach)

Démontrer qu'un quadrilatère ayant 3 angles droits est un rectangle.

Comme S:AD est perpendiculaire à S:CD , et S:BC est perpendiculaire à S:CD , alors, selon la propriété qui dit « \_\_\_\_\_ » , \_\_\_\_\_ .

Comme \_\_\_\_\_ , et \_\_\_\_\_ , alors, selon la propriété qui dit « \_\_\_\_\_ » , S:AB est perpendiculaire à S:BC .

Comme \_\_\_\_\_ , S:AD est perpendiculaire à S:CD , S:BC est perpendiculaire à S:CD , et S:AB est perpendiculaire à S:BC , alors, selon la propriété qui dit «Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits» , \_\_\_\_\_ .

Énoncés mathématiques

[Prof. Turing] : :) Bon départ!

[Élève] : S:AB est perpendiculaire à S:BC

[Prof. Turing] : :) Ça va bien.

[Élève] : S:BC est perpendiculaire à S:CD

[Prof. Turing] : :) J'ai hâte de voir la suite.

[Prof. Turing] : Quel résultat peut découler de l'utilisation de la justification suivante : Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits, en prenant en compte les antécédents suivants : S:BC est perpendiculaire à S:CD, et S:AB est perpendiculaire à S:BC?

[Prof. Turing] : Quel résultat concernant la nature du quadrilatère Q:ABCD peut-être déduit?

[Élève] : S:AD est perpendiculaire à S:CD

[Prof. Turing] : :) Je pense avoir reconnu ta stratégie, tu peux maintenant consulter l'onglet rédaction.

Démontrer qu'un quadrilatère ayant 3 angles droits est un rectangle.

Angle

- $\alpha = 90^\circ$
- $\beta = 90^\circ$
- $\gamma = 90^\circ$

Droite

- a:  $2.3x - 0.12y = 11.34$
- b:  $0.12x + 2.3y = 3.64$

Comme S:AD est perpendiculaire à S:CD , et S:BC est perpendiculaire à S:CD , alors, selon la propriété qui dit « \_\_\_\_\_ » , \_\_\_\_\_ .

Comme \_\_\_\_\_ , et \_\_\_\_\_ , alors, selon la propriété qui dit « \_\_\_\_\_ » , S:AB est perpendiculaire à S:BC .

Comme \_\_\_\_\_ , S:AD est perpendiculaire à S:CD , S:BC est perpendiculaire à S:CD , et S:AB est perpendiculaire à S:BC , alors, selon la propriété qui dit «Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits» , \_\_\_\_\_ .

Aire x Base x

Recherche

- Aire
- Base
- Congru / Isométrique
- Egalité/égale,égaux
- Hauteur
- Homologue

- > Deux triangles ayant des bases et des hauteurs homologues congrues ont la même aire
- > Si deux triangles ont une même aire et une hauteur de même mesure, les bases associées à ces hauteurs sont elles aussi congrues
- > Si deux triangles ont une même aire et une base de même mesure, les hauteurs associées à ces bases sont elles aussi congrues
- > L'aire a d'un triangle de base b et de hauteur h est donnée par la formule :  $a = (b \cdot h) / 2$

Démontrer qu'un quadrilatère ayant 3 angles droits est un rectangle.

Comme S:AD est perpendiculaire à S:CD , et S:BC est perpendiculaire à S:CD , alors, selon la propriété qui dit « \_\_\_\_\_ » , \_\_\_\_\_ .

Comme \_\_\_\_\_ , et \_\_\_\_\_ , alors, selon la propriété qui dit « \_\_\_\_\_ » , S:AB est perpendiculaire à S:BC .

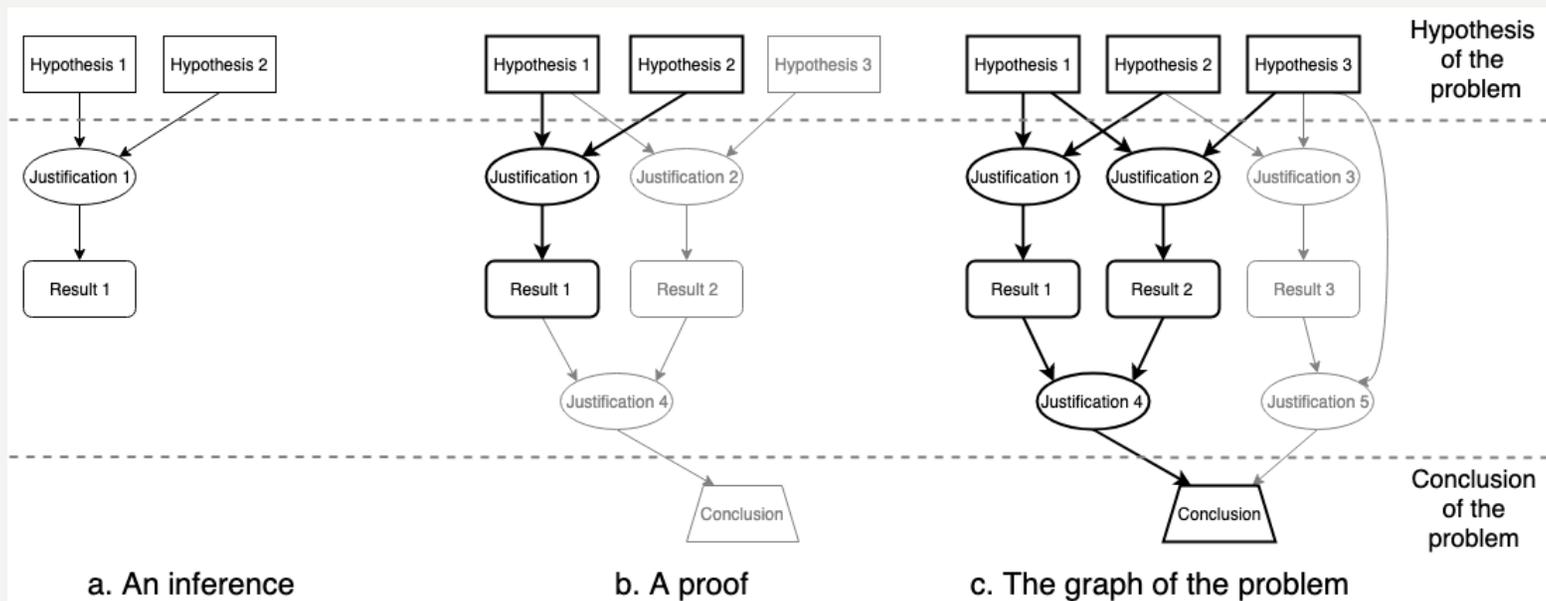
Comme \_\_\_\_\_ , S:AD est perpendiculaire à S:CD , S:BC est perpendiculaire à S:CD , et S:AB est perpendiculaire à S:BC , alors, selon la propriété qui dit «Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits» , \_\_\_\_\_ .

L'angle \_\_\_\_\_ est le supplément de l'angle \_\_\_\_\_

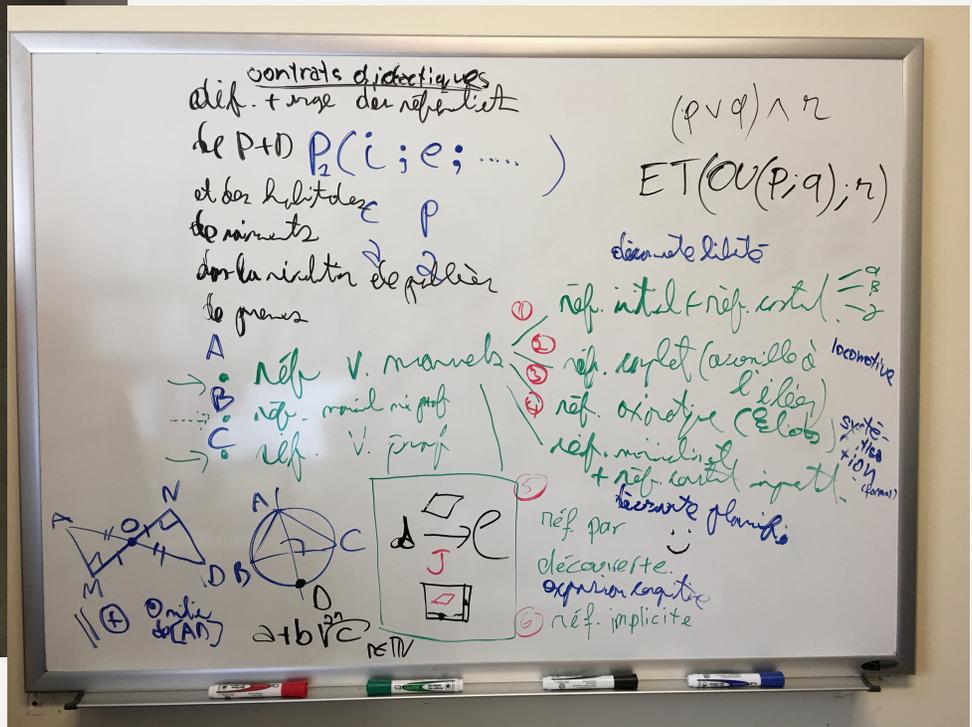


- [Prof. Turing] : Salut! À toi de jouer...
- [Prof. Turing] : As-tu bien lu l'énoncé? Relis-le au besoin et étudie bien la figure fournie.
- [Prof. Turing] : As-tu bien ciblé ce que tu cherches à démontrer?
- [Prof. Turing] : Quels éléments de l'énoncé peuvent t'être utiles pour amorcer ta démonstration?
- [Élève] : Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits
- [Prof. Turing] : :) Bon départ!
- [Élève] : S:AB est perpendiculaire à S:BC
- [Prof. Turing] : :) Ça va bien.
- [Élève] : S:BC est perpendiculaire à S:CD
- [Prof. Turing] : :) J'ai hâte de voir la suite.

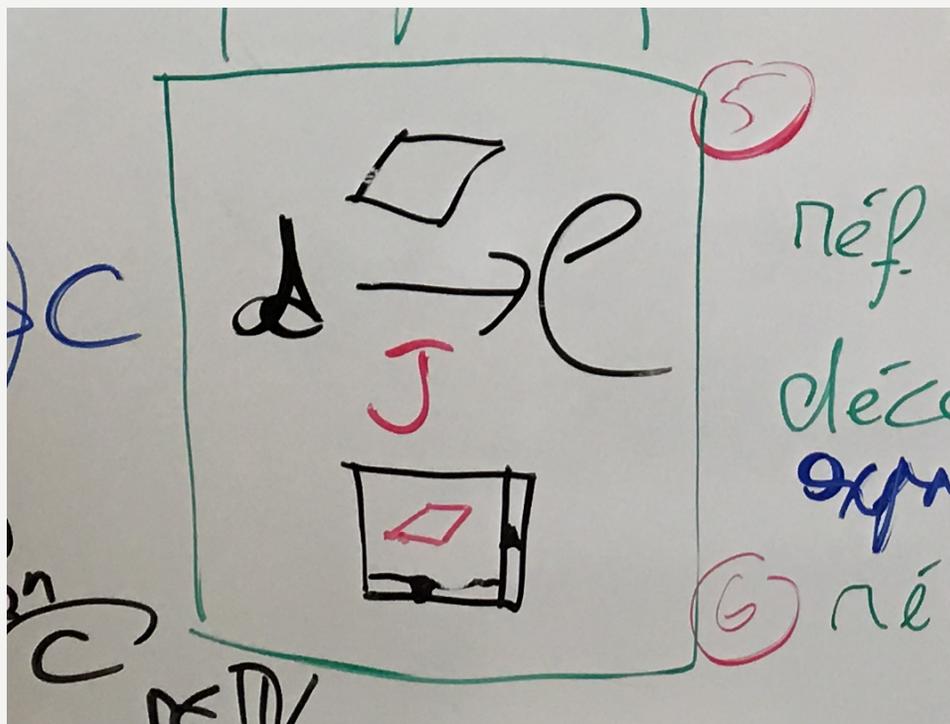
# What's going on under there



# What could be going on under there



# Inferential approach: on justifications

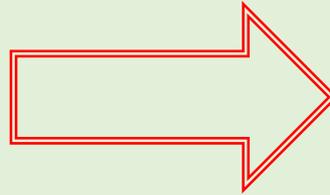


# Discursive justification

Antecedents

$(AB) \parallel (AC)$

Justification



Euclid's  
Axiome

Consequent

A, B and C  
are aligned

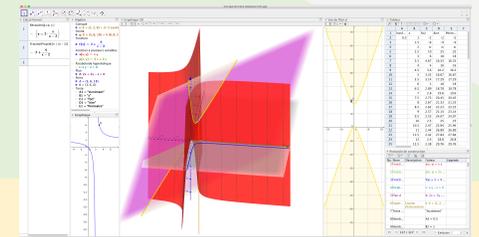
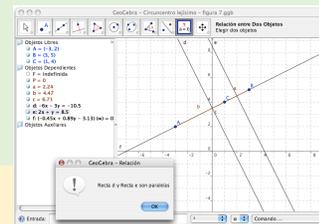
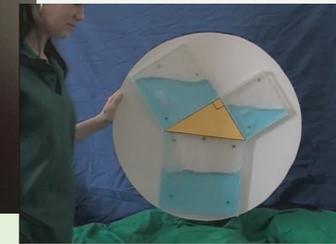
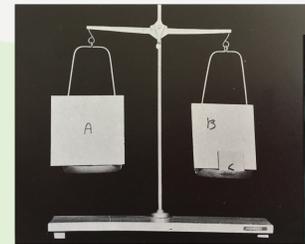
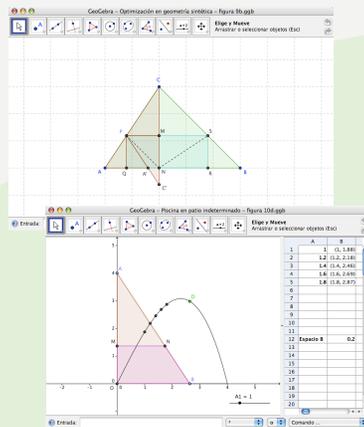
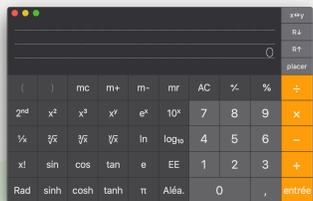
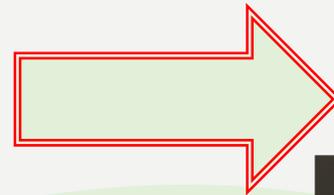
# Any other?

What happens if some inferences are justified by an interacting technological tool, such as **calculations** (numerical or symbolic), the construction or animation of a **dynamic figure**, the execution of an **algorithm**, the **creation** of a recognized mathematical process, the use of an **automated reasoning tool** or the **modelling** of a real-life situation?

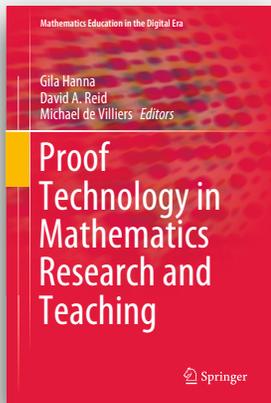
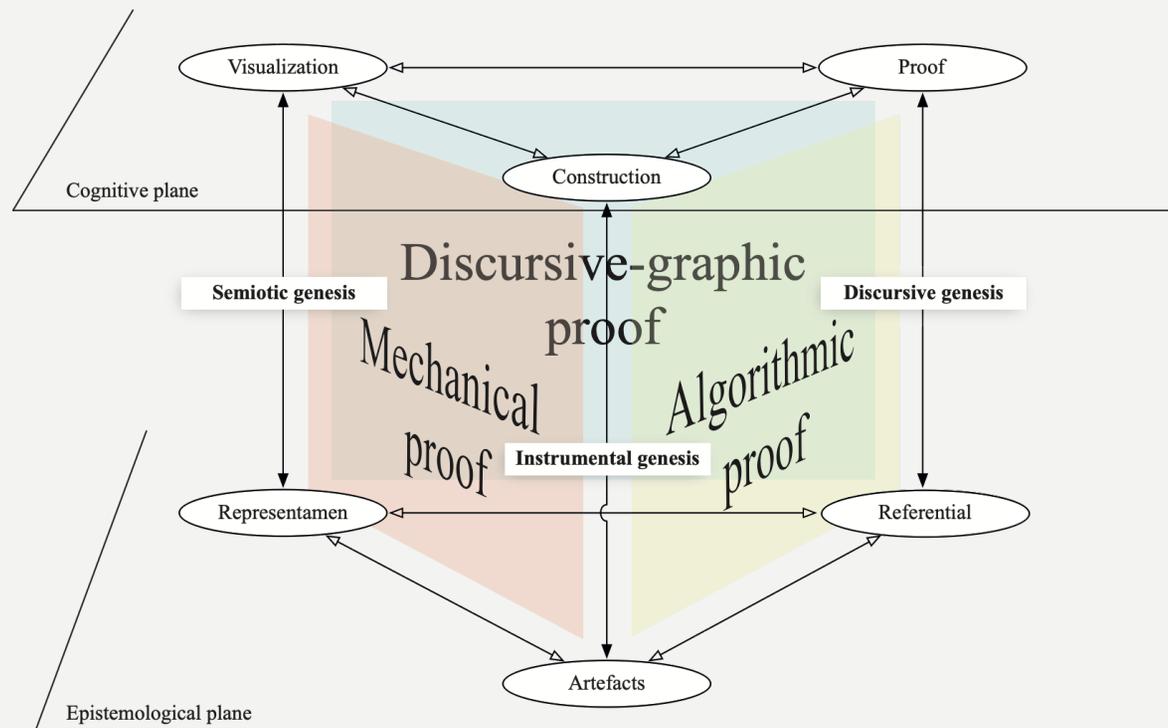
Antecedents

Justification

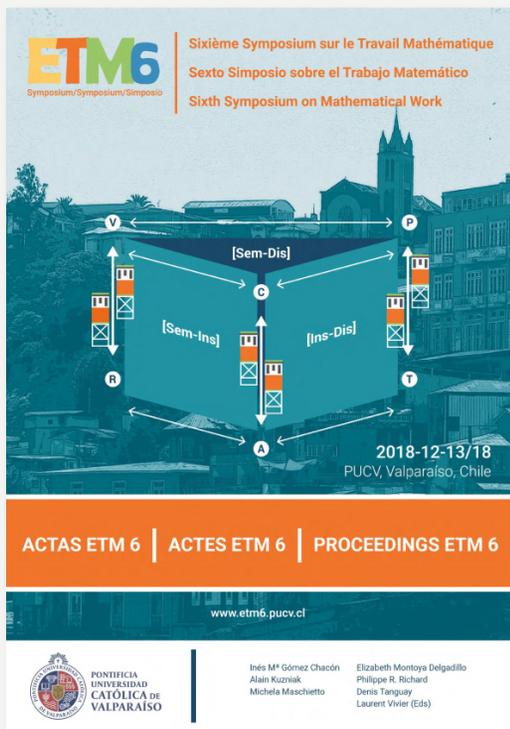
Consequent



# Issues and challenges in instrumental proof



# On mathematical work at school



# Questions and discussion



See *appendices* for more information

## Appendix 1

The realization of a proof support system in a process of adaptation to the human perspective

**Ludovic Font**

Philippe R. Richard • Othmane Farid • Sébastien Cyr • Michel Gagnon • Fabienne Venant



# Generation of a problem's solutions

- Automated generation based on logic programming:
  - Input >> the problem statement, i.e., hypotheses and conclusion, and a set of properties / definitions
  - Output >> the set of all possible proofs
- The problem statement must be **encoded**
- The generated proofs are based on a given **referential** (Kuzniak & Richard, 2014)
- This referential can vary depending on the teacher, the course, the level, the didactic contract, etc.



# Knowledge extraction from a problem statement

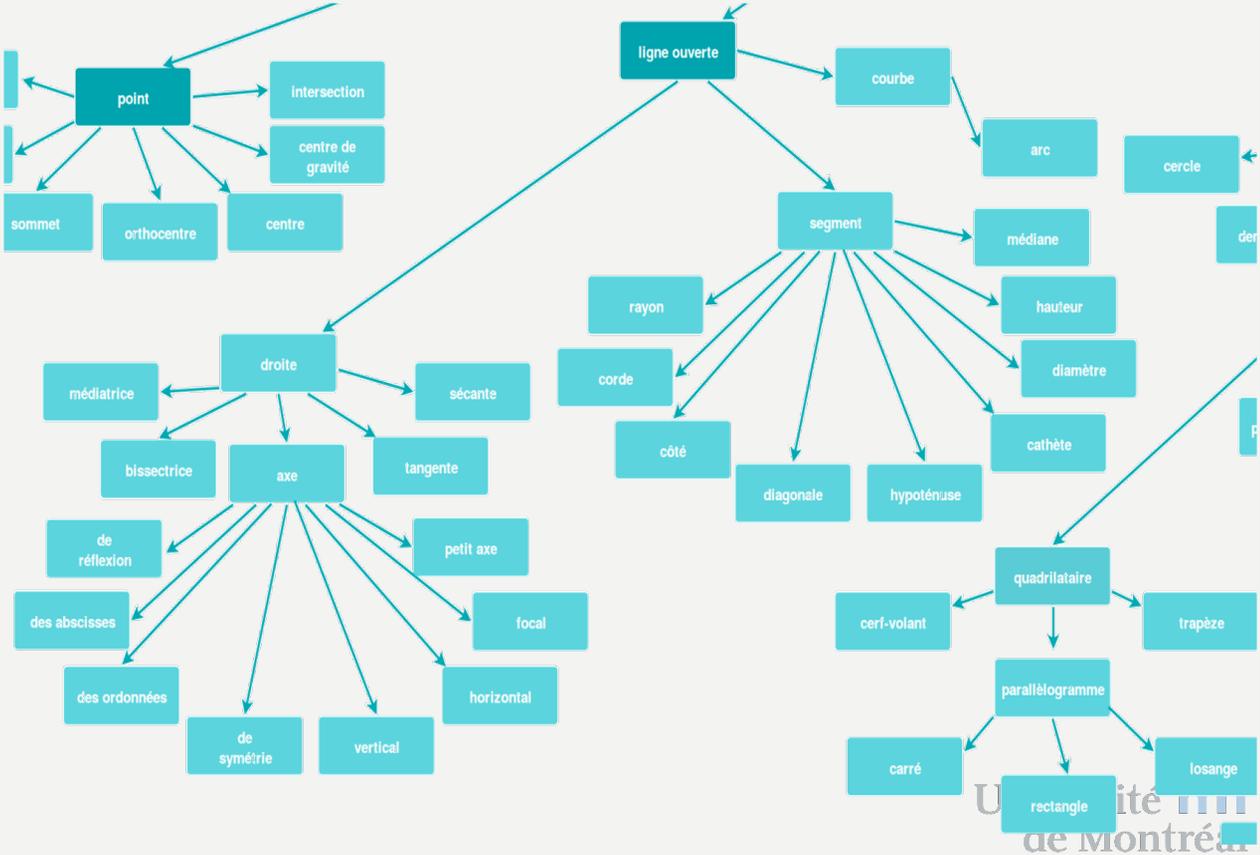
- Extraction, from a textual source, of a problem hypotheses and conclusion
- Many linguistic and mathematical variations in the wording
- **Example 1.**  $X$  and  $Y$  are equidistant from  $A$  and  $B$ . Prove that  $(XY)$  is the perpendicular bisector of  $[AB]$
- **Example 2.**  $A$  and  $B$  are points on line  $l$ . The point  $X$  is at the same distance from point  $A$  and from point  $B$ . The same is true for point  $Y$ . Show that the line on which  $X$  and  $Y$  are is the perpendicular bisector of line  $l$ .





# Knowledge extraction from a problem statement

Extraction based on an ontology describing geometric entities and relations





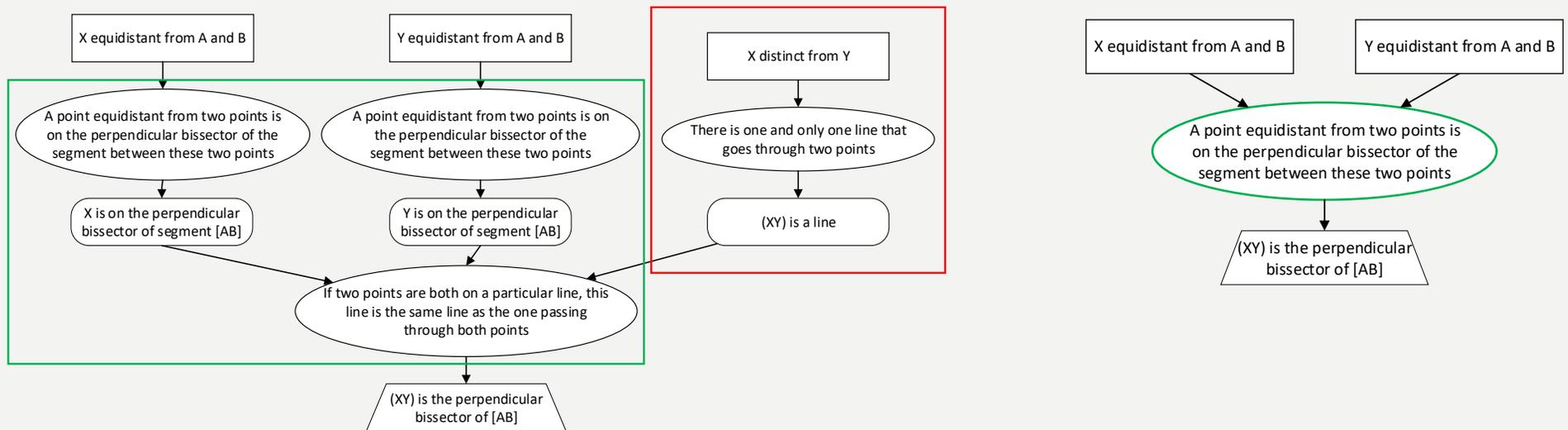
# Knowledge extraction from a problem statement

## Two goals

- Maximal coverage (recall) of the extracted hypotheses, both explicit and implicit:
  - In examples 1 and 2, the fact that  $X$ ,  $Y$ ,  $A$  and  $B$  are distinct point is not explicit
- Uniform representation of the extracted knowledge despite the mathematical and linguistic variations between two similar problem statements

# The inferential shortcuts

**Example.**  $X$  and  $Y$  are equidistant from  $A$  and  $B$ . Prove that  $(XY)$  is the perpendicular bisector of  $[AB]$





# The referential

- For the structuring of the system, the referential (in the meaning of Kuzniak & Richard, 2014) is made up by a set of definitions and properties characteristic, resulting from mathematical work
- In Quebec, teachers are free to choose their referentials as long as they meet the minimum requirements of the official mathematics curriculum (<http://www.education.gouv.qc.ca/>)
- This leads to a dynamic referential that must be introduced in the system to reflect the reality of the classroom (intention to adapt to didactic contracts)

## Appendix 2

The modelisation of the possible proofs for high school geometry problems in the tutoring software QED-Tutrix

**Ludovic Font**

Michel Gagnon • Nicolas Leduc • Pascal-Alexandre Morel • Philippe R. Richard • Michèle Tessier-Baillargeon

# A typical high school problem

(easily explained in a slide show to shed light on the main issues)

“Prove that a quadrilateral with three right angles is a rectangle”



Démontrer qu'un quadrilatère ayant 3 angles droits est un rectangle.

Comme S:AD est perpendiculaire à S:CD , et S:BC est perpendiculaire à S:CD , alors, selon la propriété qui dit « \_\_\_\_\_ » , \_\_\_\_\_ .

Comme \_\_\_\_\_ , et \_\_\_\_\_ , alors, selon la propriété qui dit « \_\_\_\_\_ » , S:AB est perpendiculaire à S:BC .

Comme \_\_\_\_\_ , S:AD est perpendiculaire à S:CD , S:BC est perpendiculaire à S:CD , et S:AB est perpendiculaire à S:BC , alors, selon la propriété qui dit «Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits» , \_\_\_\_\_ .



Énoncés mathématiques

- [Prof. Turing] : :) Bon départ!
- [Élève] : S:AB est perpendiculaire à S:BC
- [Prof. Turing] : :) Ça va bien.
- [Élève] : S:BC est perpendiculaire à S:CD
- [Prof. Turing] : :) J'ai hâte de voir la suite.
- [Prof. Turing] : Quel résultat peut découler de l'utilisation de la justification suivante : Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits, en prenant en compte les antécédents suivants : S:BC est perpendiculaire à S:CD, et S:AB est perpendiculaire à S:BC?
- [Prof. Turing] : Quel résultat concernant la nature du quadrilatère Q:ABCD peut-être déduit?
- [Élève] : S:AD est perpendiculaire à S:CD
- [Prof. Turing] : :) Je pense avoir reconnu ta stratégie, tu peux maintenant consulter l'onglet rédaction.

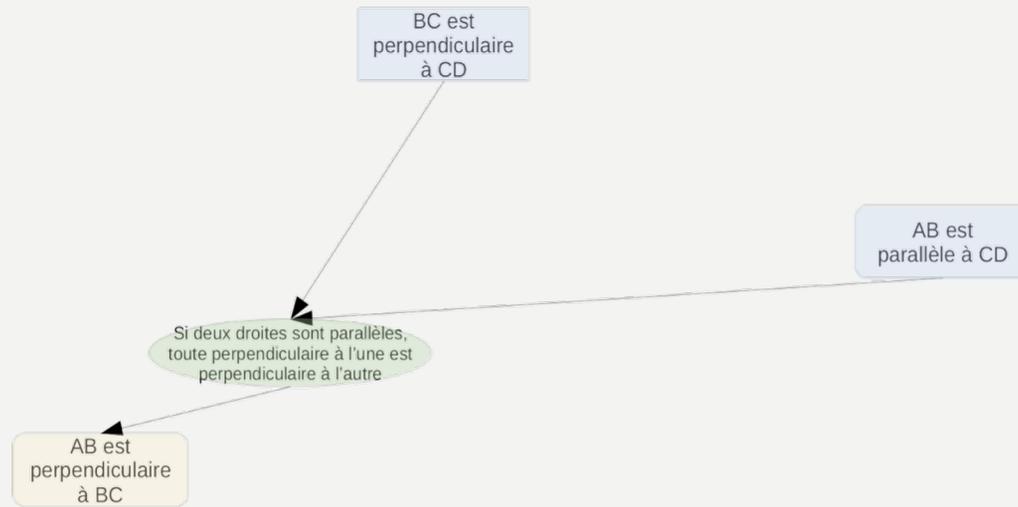


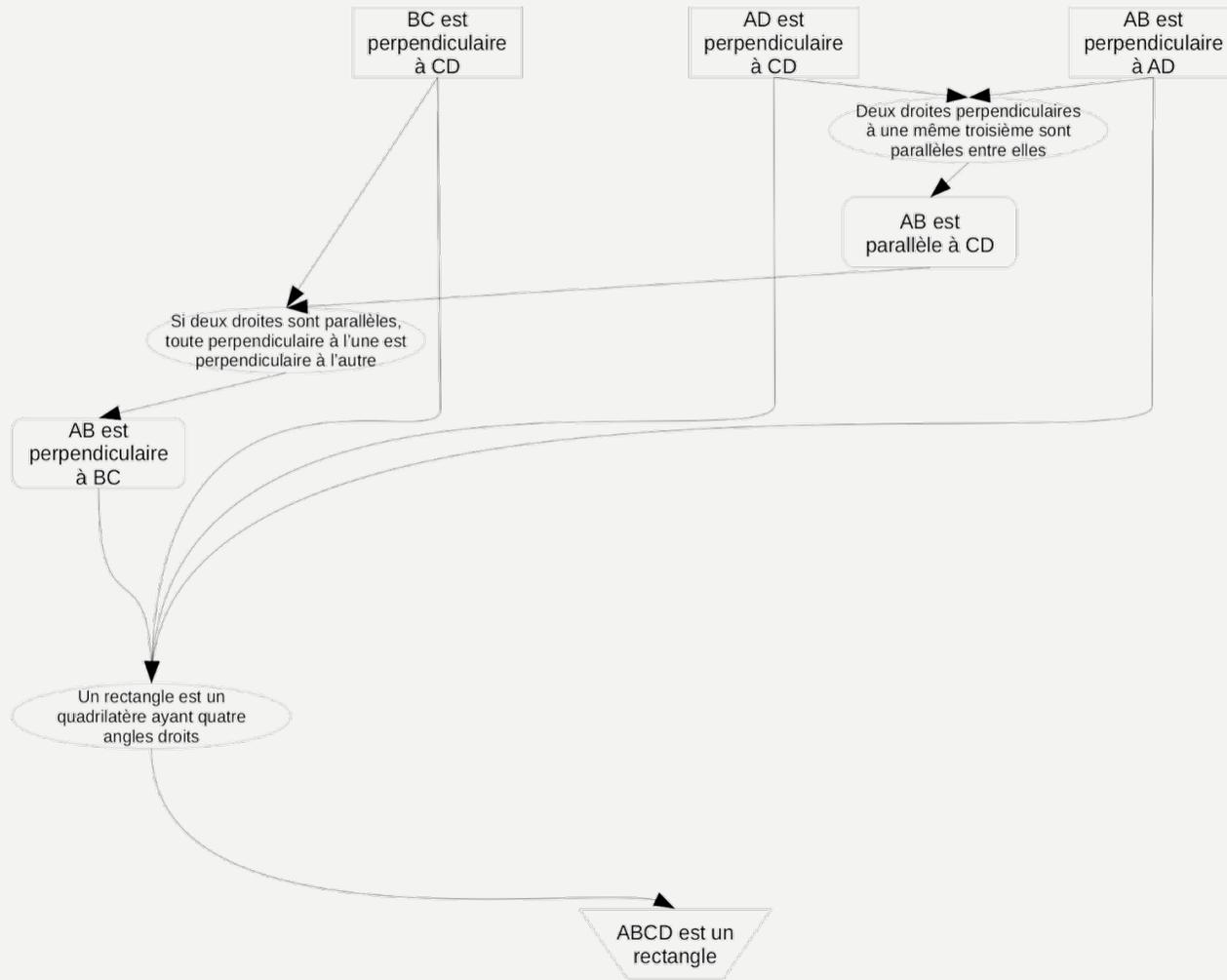
## In other words

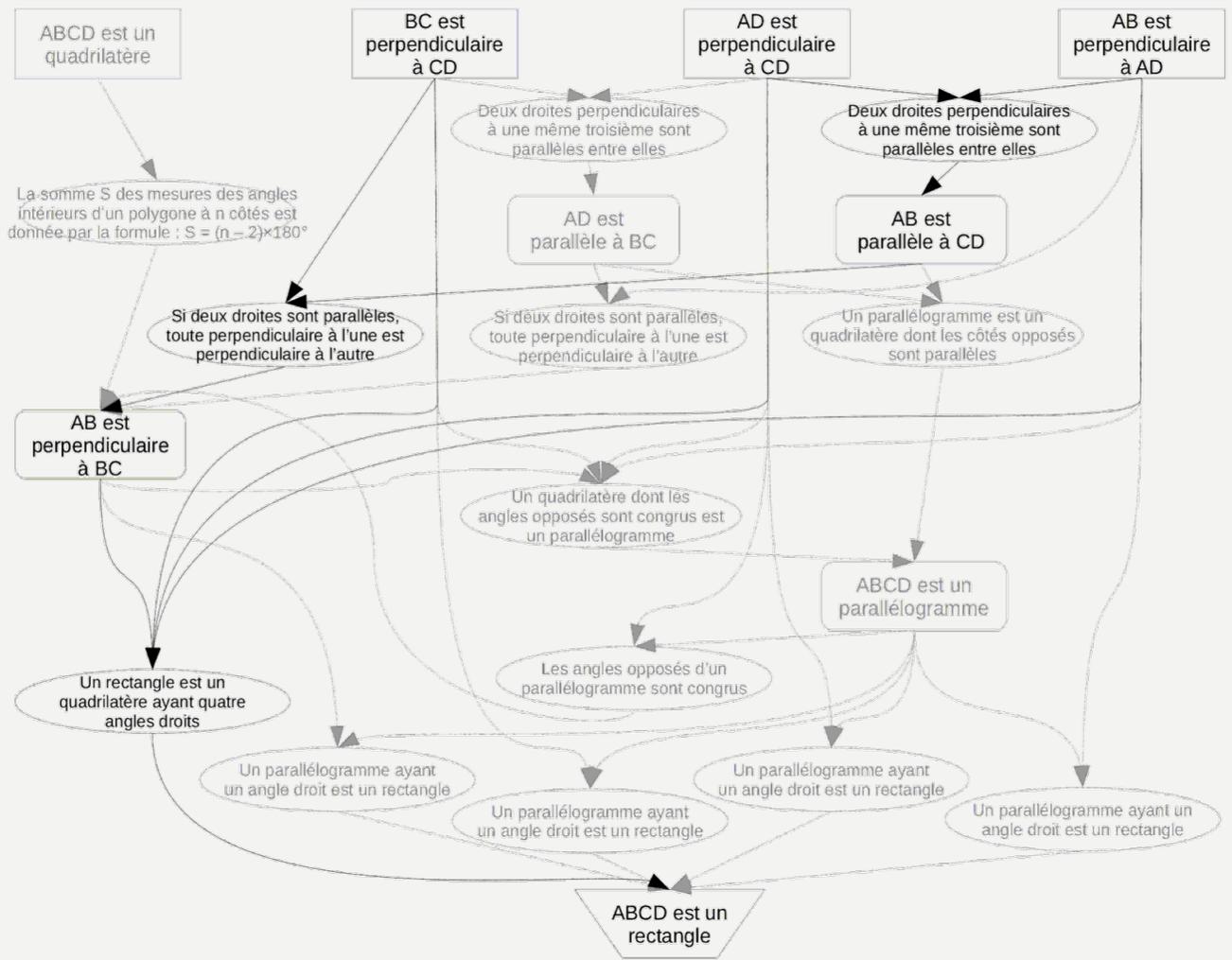
- To anticipate the students' behaviour, a structure containing all the ways to solve the problem is needed, not only the shortest proof
- Our model stores such a set of proofs in a graph
- This graph:
  - Is then updated to follow the student's progress
  - Can be analyzed to find the proof the student is currently working on
  - Is explored to propose, if needed, tutorial messages based on the (estimated) student's mathematical work

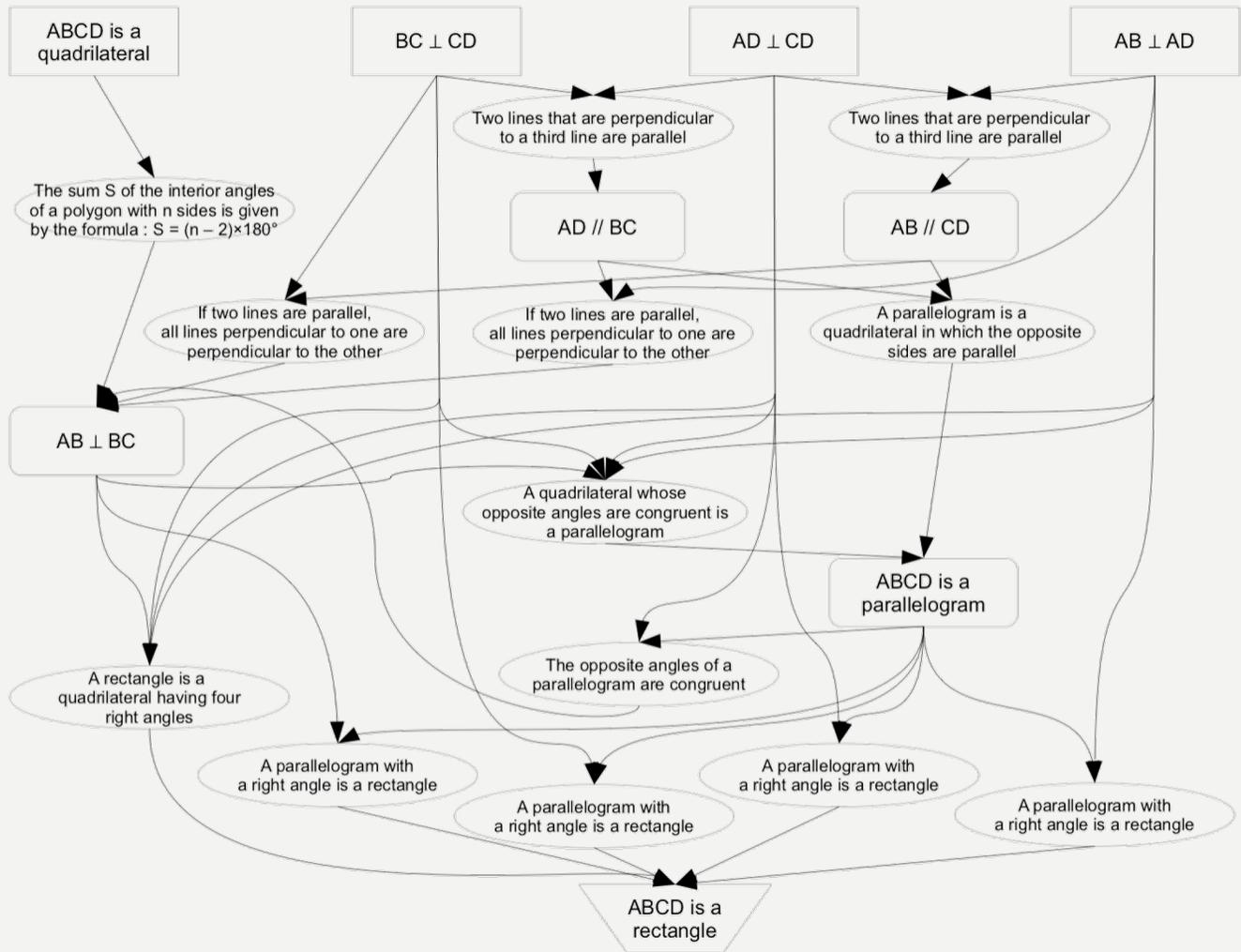
## An example of proof

1. Since AB and AD are perpendicular, and AD and CD are perpendicular, then, using the property “two line perpendicular to a third are parallel”, we conclude that AB and CD are parallel.
2. Since BC and CD are perpendicular, and AB and CD are parallel, then, using the property “If two lines are parallel, any line perpendicular to one is perpendicular to the other”, we conclude that AB and BC are perpendicular.
3. Since AB and AD are perpendicular, AD and CD are perpendicular, BC and CD are perpendicular, and AB and BC are perpendicular, then, using the definition “a rectangle is a quadrilateral with four right angles”, we conclude that ABCD is a rectangle.





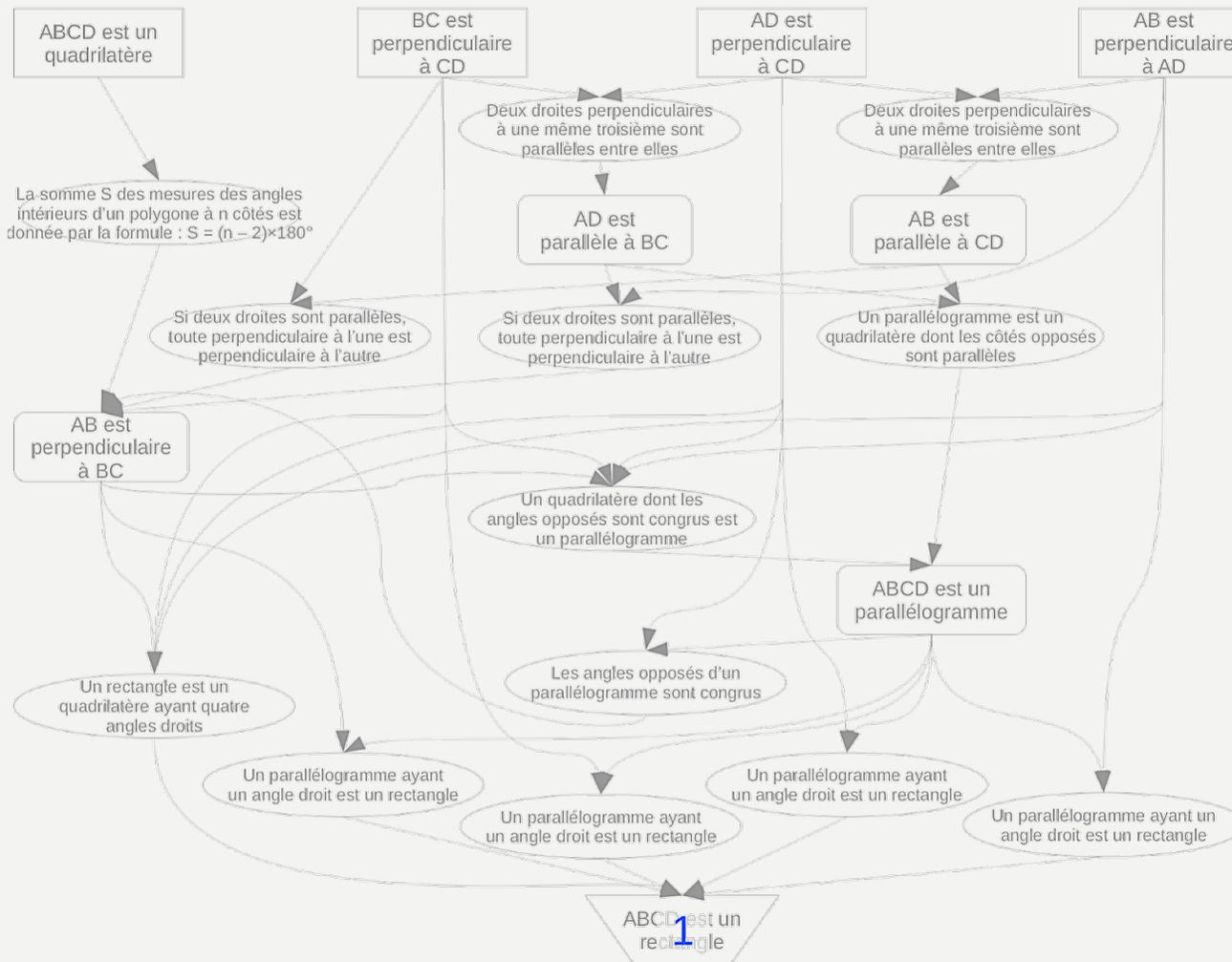


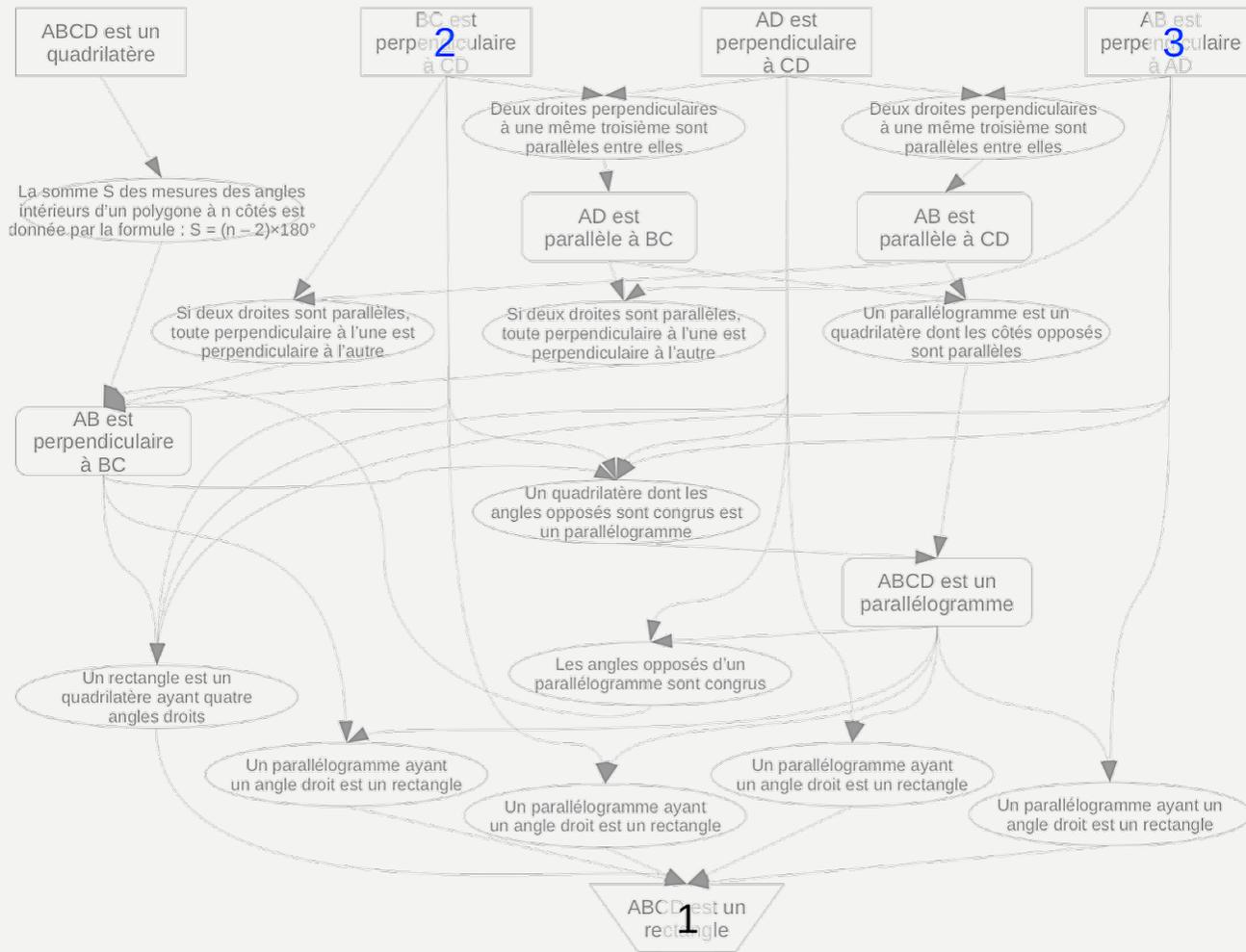




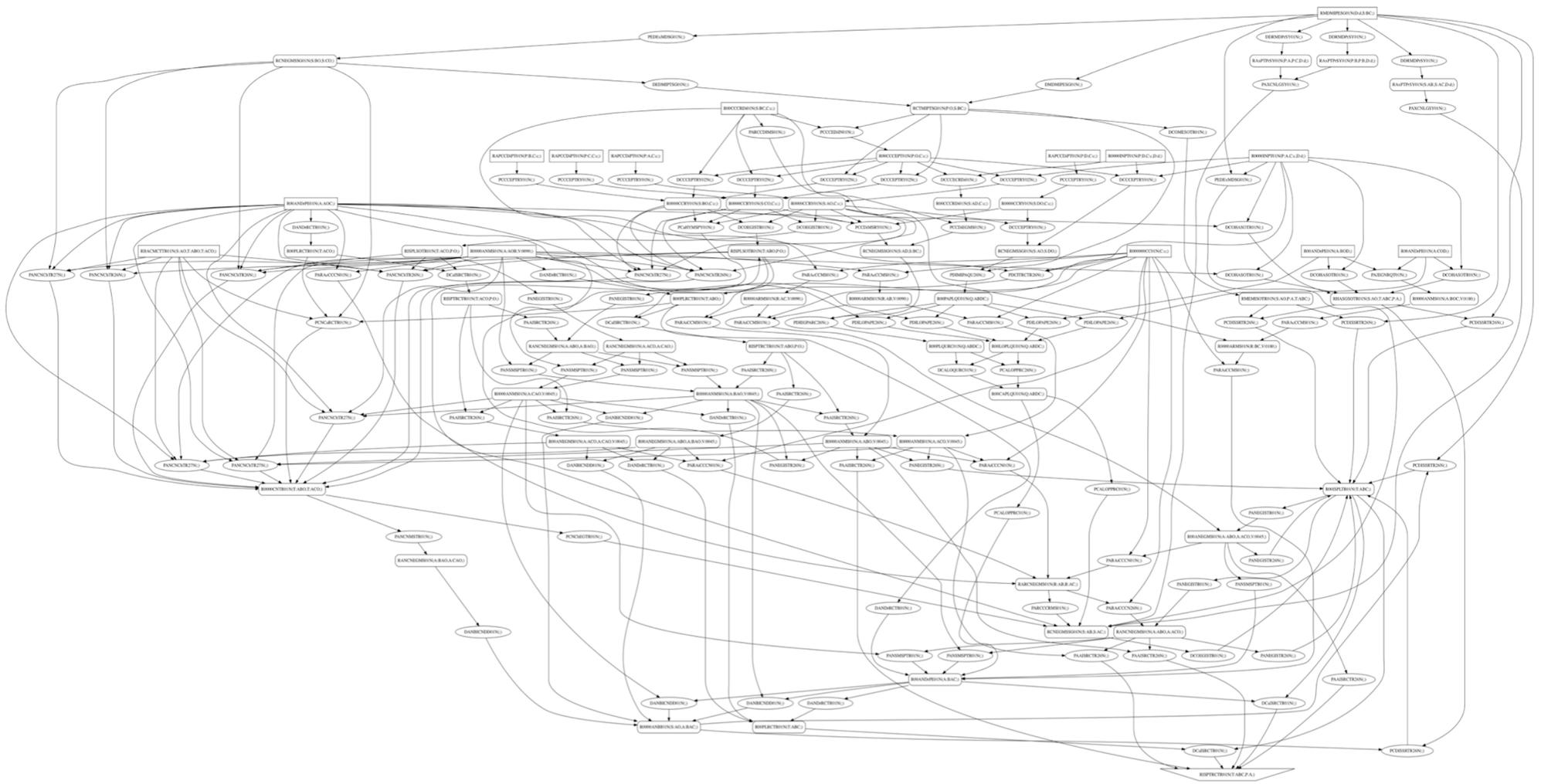
## Typical HPDIC uses

- Storing the student's progression in the resolution of a problem
- Listing the  $n$  most advanced proofs
- Identifying the next tutorial message in case the student is stuck







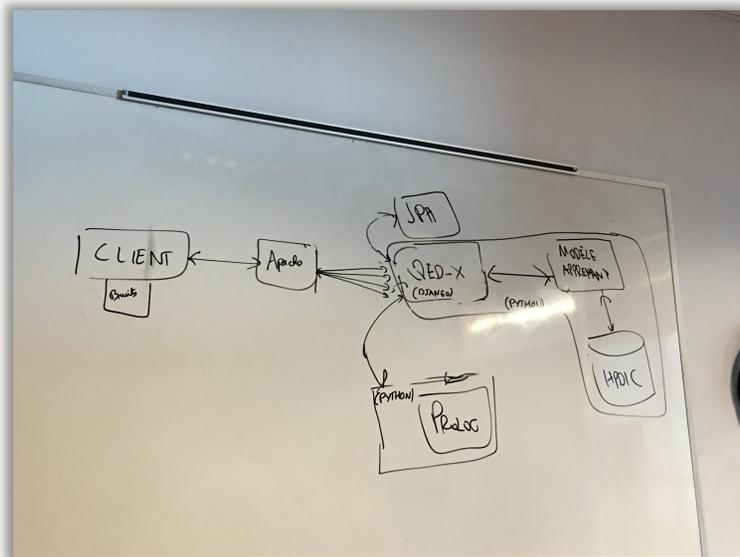




## Short conclusions

- The HPDIC graph can represent a set of proofs to a given problem
- It allows the representation of “real” proofs, as they appear in class
- QED-Tutrix uses the HPDIC graph of a problem to evaluate the mental state of a student, and to anticipate his resolution process

# Work to come and projection towards the future



Université   
de Montréal

## CAHIER DES CHARGES

### Développement du logiciel QED-Tutrix

Nom de l'entreprise : Polytechnique Montréal, Université de Montréal

Laboratoires : Turing, LAMA-WeST

Nom du projet : QED-Tutrix 2.0 (version web)

Personnes responsables : Michel Gagnon (Génie informatique / logiciel)

Nicolas Leduc (Génie informatique / logiciel)

Philippe R. Richard (Didactique)

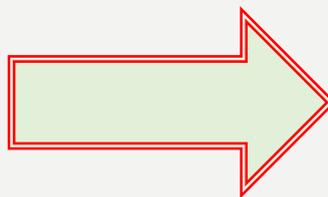
22 janvier 2019

Université   
de Montréal

# Justification

Antecedents

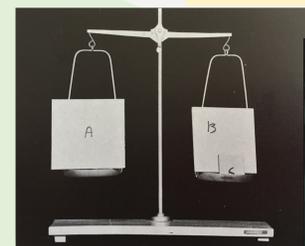
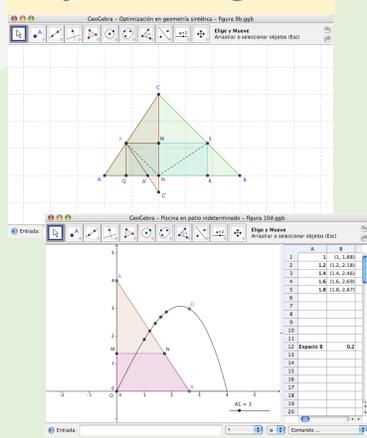
Consequent



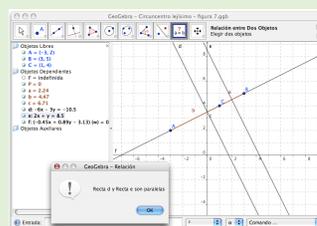
Algorithm

Creation

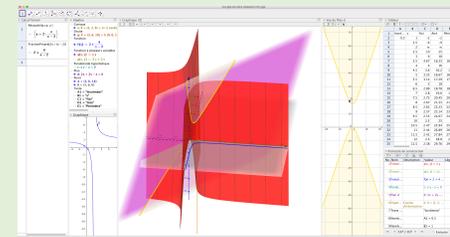
Dynamic figure



Calculations



Automated reasoning tool



Modelling



Thanks for your attention !